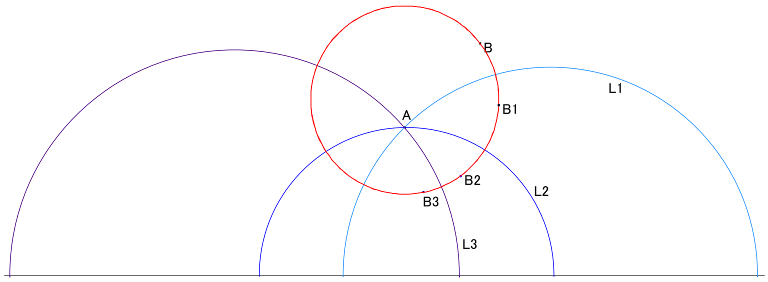
9. 極限円

9.1. 極限円の定義

「点 A 中心の点 B を通る双曲的円」は,「A を通る双曲的直線 L に関する B の鏡像を B'とした時, L が A を通る双曲的直線を全て表すように変化した時に, B'の描く軌跡」と一致しました. (7.2)
即ち,



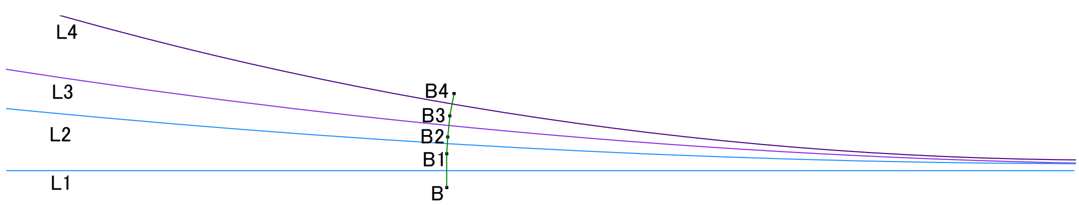
$B \xrightarrow{\text{by } L_1} B_1 \xrightarrow{\text{by } L_2} B_2 \xrightarrow{\text{by } L_3} B_3 \cdots$ と適切に鏡像を作る時, 点 B_k の集まりが双曲的円です.

ここで, A を無限遠点に持っていくと, 双曲的直線 $L_1, L_2, L_3 \cdots$ は「互いに双曲的平行な直線」となります. このとき点 B_k の集まりを極限円と定めます. 即ち「A が中心で点 B を通る極限円」を,
「無限遠点 A を共有するような(互いに平行な)双曲的直線 L に関する B の鏡像を B'として, L が A を共有するような双曲的直線を全て表すように変化した時に, B'の描く軌跡」と定めます.

そして, $L_1, L_2, L_3 \cdots$ を, 極限円の軸と言います.

「現実世界」で作図するには, 互いに平行な直線 $L_1, L_2, L_3 \cdots$ を, 例えば 平行線角を使って作り, $\{L_k\}$ に関する鏡像を順に取って, 点 B の軌道を作ります. L_k と L_{k+1} を非常に近くとると, B の軌道は, B を通る極限円に非常に近くなります. (B_k と B_{k+1} の間は双曲的線分で結ぶ. B_k と B_{k+1} が非常に近い時は, 双曲的線分 B_kB_{k+1} と極限円は, 非常に近い.)

[極限円のイメージ]

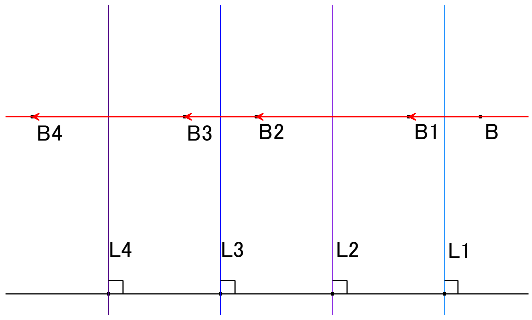


9.2. 極限円の二つの形

ユークリッド平面では，極限円は直線ですが，H+では，双曲的直線ではありません．

9.2.1. 実軸に平行な直線

Lが実軸に垂直な直線群の時，極限円は「実軸に平行な直線」となります．



9.2.2. 実軸と接する円

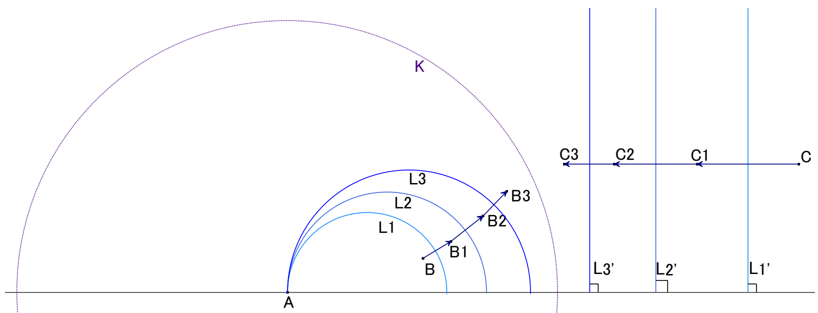
Lが 実軸上の無限遠点Aを共有する双曲的直線の時，A中心の円Kに関する鏡像 f により，

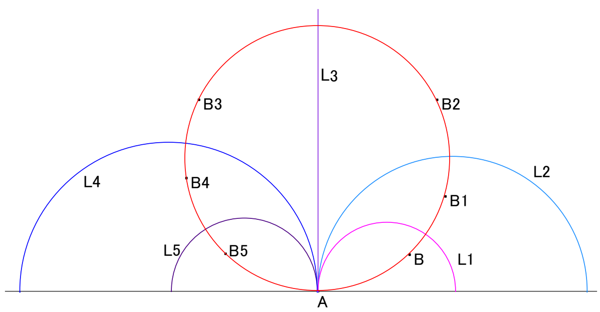
Lは実軸に垂直な直線L'へ移る．さらに B_k の f による像を C_k とすると，B_k と B_{k+1} が L_k に関し

鏡像ならば，C_k と C_{k+1} も L_k' に関し鏡像となる．C_k の集合は「実軸に平行な直線 m 」だから，

B_k の集合は，m のKに関する鏡像で，「Aに於いて実軸と接する円」．即ち，

Lが実軸上の無限遠点を共有する双曲的直線群の時，極限円は「実軸に接する円」となる．





9.2.3.　Cabri II による検証

点 A, Z を drag して下さい　 definition_1.html ,　definition_2.html

点 B と L_k 上の点（黒丸）を Drag して下さい　 type2_horicircle.html

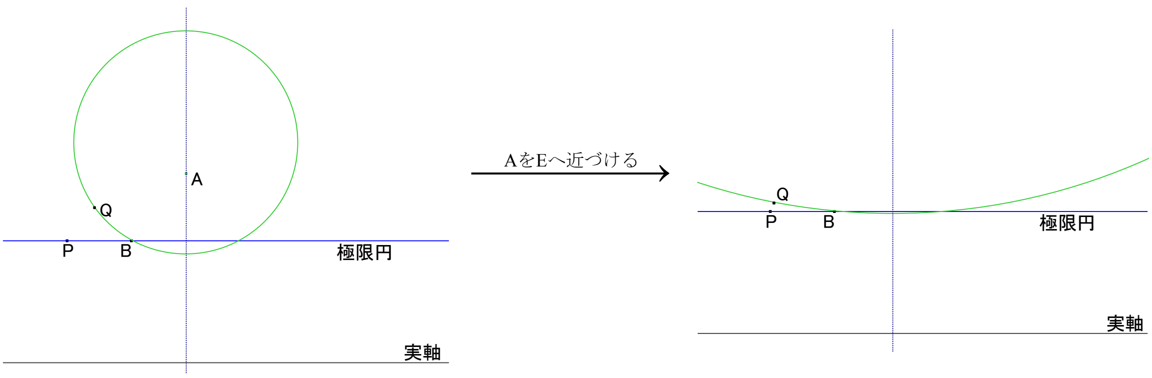
9.3.　極限円の性質

9.3.1. 極限円は 無限大半径の双曲的円.

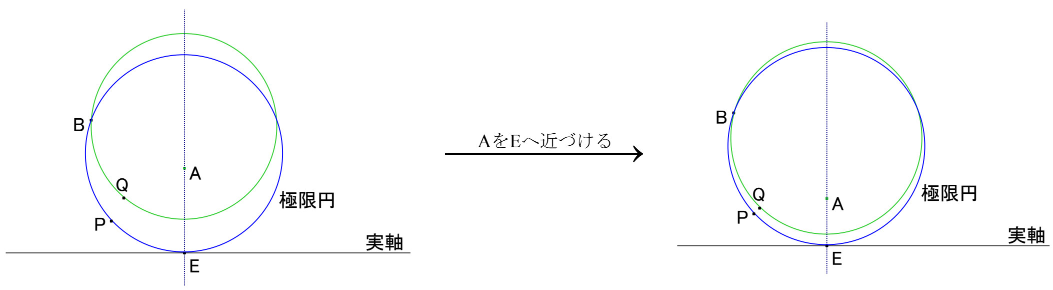
無限遠点 E と点 B を通る極限円を D，点 A が中心で点 B を通る双曲的円を C とする．　A を E に限りなく近づけると，極限円上の任意の点 P と C の距離は限りなく小さくなり，また C の半径は，限りなく大きくなる．（これは，E が虚軸上方向の無限遠点のときを考えると明らか.）

この意味で，極限円は 無限大半径の双曲的円 と言える.

[E が虚軸上方向の無限遠点（極限円が実軸と平行な直線）のとき]



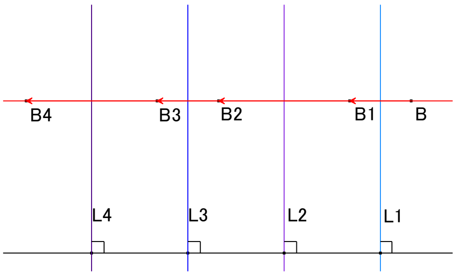
[E が実軸上の無限遠点（極限円が実軸に接する円）のとき]

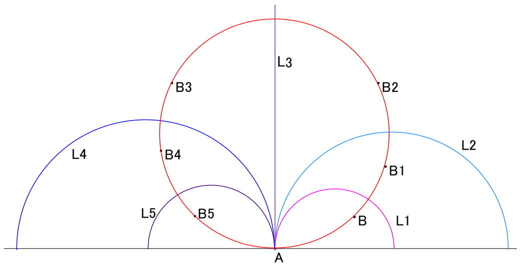


9.3.1.1. Cabri II による検証

Drag　A　 infinite_circle1.html,　 infinite_circle2.html

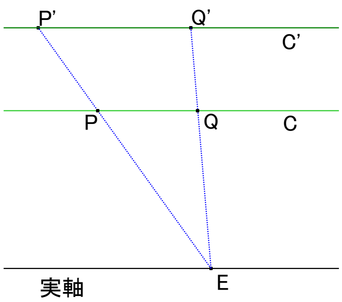
9.3.2. 極限円の軸は，極限円と直交する．

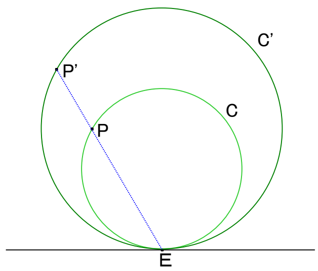




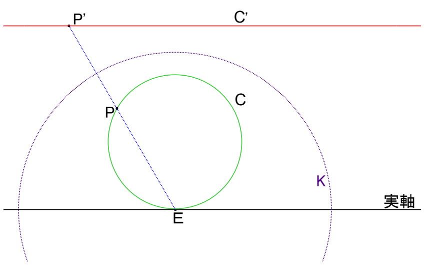
すなわち，点 B_k の軌跡（極限円）が， $L_1, L_2, \cdots$ (軸)と直交することを意味していますが，極限円が，実軸と平行な直線のとき（左上図）を考えると明らかです．

9.3.3. 極限円は，全て双曲的合同となる．





極限円 C と C'がともに実軸に平行な直線の時，実軸上の適当な点 E を中心とする相似変換で C は C'へ移ります．「"実軸上の点が中心で相似比が正の相似変換" は 双曲的移動」(2.3) だから，C と C'は双曲的合同です．C と C'が実軸上の無限遠点を共有する場合も，相似変換で移せます．



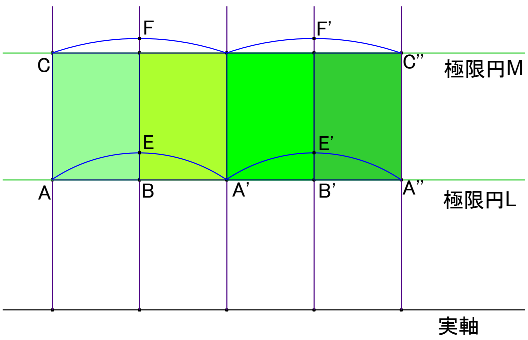
C が実軸に接する円で C'が実軸に平行な直線の時も，接点を中心とする円 K に関する鏡像で，C は C'へ移せます．よって任意の極限円 C は実軸と平行な直線に双曲的移動で移り，また，任意の実軸に平行な直線も双曲的合同だから，任意の極限円は双曲的合同となります．

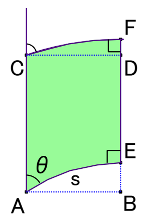
9.4. 極限円の作図

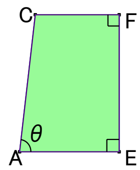
9.4.1. Lobachevskii(ロバチェフスキー)の作図

ロバチェフスキーは，Bolyai と並んで有名な双曲幾何の発見者ですが，彼は作図には興味が無く，平行線角を使ったアイデアをあげているだけです.

L, M を極限円，L 上に 2 点 A,B，M 上に 2 点 C,D を取り，双曲的直線 AC，BD は，共に L と M の軸とします．このとき $\angle ABD = \angle CDB = \angle R$ です.

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>


</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>四角形 ABCD と合同な四角形を，L と同じ方向に積み重ねる（対称移動を繰り返す）と，極限円 L ができる.</td>
<td>θ は s に対する平行線角．点線は極限円．実線は双曲的直線．s が小さいと, この 2 つは, ほぼ一致する.</td>
<td>左の四角形を，ユークリッド平面上で無理に描いた図．直線を「真直ぐに」描いた.</td>
</tr>
</table>

四角形 ABCD を，辺 BD に関し折り返して，四角形 A'C' DB を作ります．次に，この四角形を辺 A' C' に関し折り返し，四角形 A'B'D'C' を作ります．これを繰り返すと，辺 AB，BA'，A'B'… ができます．これを繋げると，極限円 L, M が正確に作図できます.

本当は，辺 AB は極限円でなく双曲的直線を使うべきです.（極限円を描きたいのに，極限円を使うのはおかしい!）左上図の様に, E から立てた垂線上に点 A をとり， $s = [A, E]$に対する平行線角 θ を測り， A から直線 AE に対し θ の角をなすようにして，BD に平行な双曲的直線を引き，その上の適当な点 C から BD に垂線 CF を下ろします． この四角形 AEFC を辺 EF に関し折り返し，四角形 A'C'FE を作ります．これを繰り返して，辺 AEA', A'E'A''… を作り，これを繋げると，極限円 L と M が近似的に作図できます.

平行線角を求めるには Bolyai の「平行線角の作図」が使えます．（ロバチェフスキーは，平行線角を求める作図方法は示していません.）

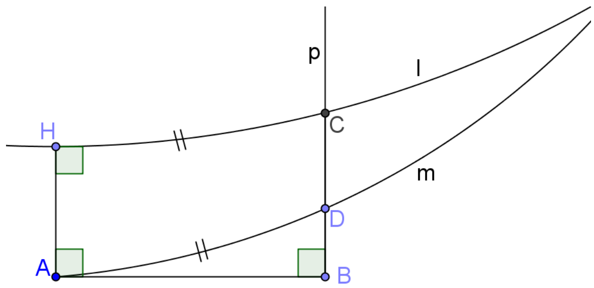
9.4.2. Bolyai(ボヤイ) の極限円の作図

ボヤイの方は，もっと作図に興味が有ったようです．　詳しくは，こちらをご覧ください．

[準備 1] (*cf* 8.5)「直線 l 外の 1 点 A を通り　l に平行な直線」の作図．(図の曲線は全て双曲的直線．)

① A から l に垂線 AH を下ろします． ② HA と直交する直線を A から引き，その上に適当な点 B をとります．さらに，B を通り，AB と直交する直線 p を引きます． ③ l と p の交点 C をとり，コンパス等で，p 上に $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{HC}}$ となる点 D をとります． ④ 直線 AD が，l と平行な直線 m です．

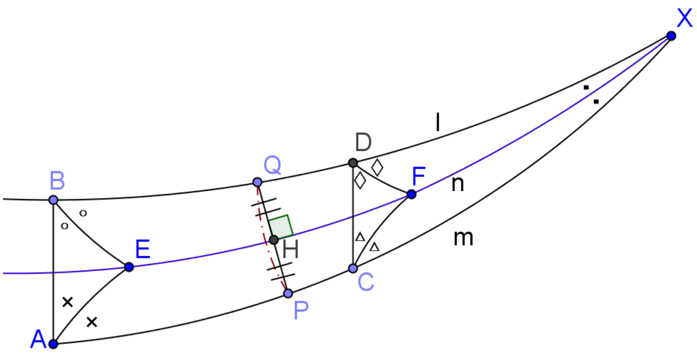
(*)ユークリッド平面上でも この作図はできます．この時「D = B, ∠HCB = ∠R 」となります．



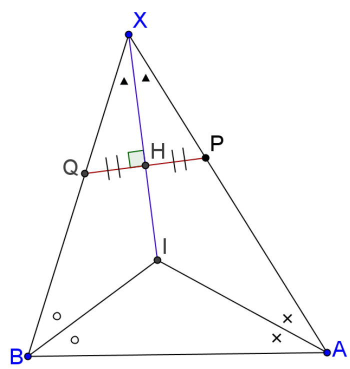
[準備 2]「直線 $m \mathbin{/\!/} l$ のとき，l と m の「2 等分線（対称軸)」の作図

(点線の弧 PQ は極限円，それ以外の曲線は全て双曲的直線．)

① l 上に点 A,C を，m 上に点 B,D を適当に取り直線 AB,CD を引きます． ② 図のように　直線 AB と l のなす角の 2 等分線と，直線 AB と m のなす角の 2 等分線の交点 E を作ります．同様にして，直線 CD と l ,直線 CD と m のなす角の 2 等分線の交点 F を取ります． ③直線 EF が，直線 m と直線 l の「2 等分線」n です．



[X が無限遠点のとき]



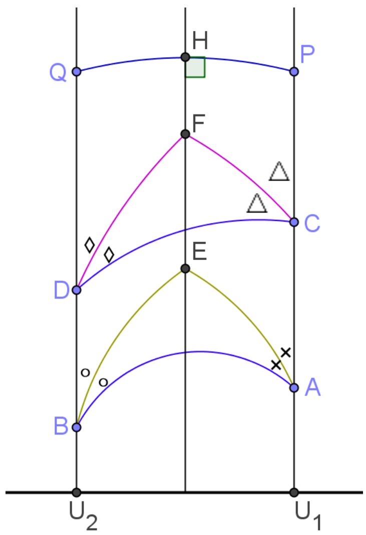
[X が無限遠点でないとき]

(*)双曲平面でも「点から直線には垂線が下ろせる」ので，△ABX の内心 I は存在し，辺 AX 上の点 P から直線 XI に下ろした垂線と直線 XB の交点を Q とすると，△XPH≡△XQH で，P と Q は XI に関し対称となります．(右上図) これは X が無限遠点のときでも成り立ちます．(左上図)
即ち，m と l は n に関し線対称となっています．

つまり「2 等分線」というのは単に∠AXE=∠BXE ($=0^{\circ}$)が成り立つだけではなく，「対称軸」の様なものです．これを④とします．

④ m 上の点 P から n に下ろした垂線 PQ（直線）と l の交点を Q とすると，n に関し P と Q は対称です．即ち，[H,Q]=[H,P]かつ PQ⊥n になります．故に P と Q は同じ極限円上にあります．

[H^{+} ではどうなるか?]
H^{+} で，直線 m と l が実軸に垂直な直線の時は，n も実軸に垂直な直線となり，さらに[P,H]=[Q,H]より，直線 EF は，ユークリッド的に見ても，m と l の対称軸となることが解かります．



anglebisector.html(Geogebra),
anglebisector.html(Cabri)

Bolyai(ボヤイ) の極限円の作図

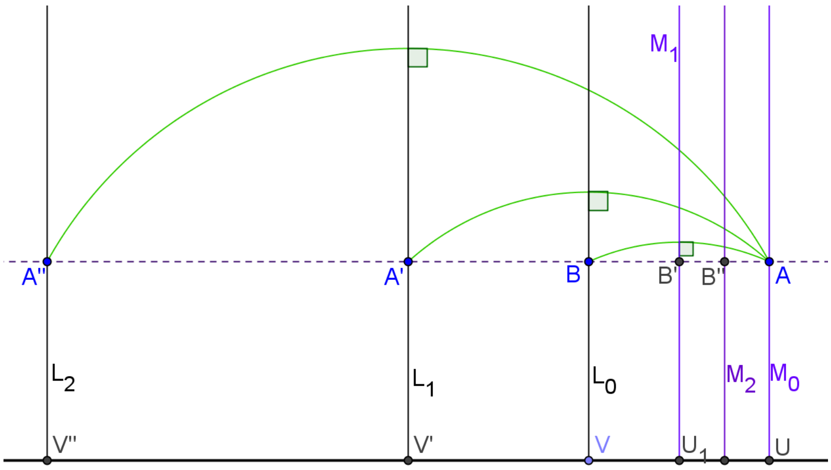
[準備 1,2]を使って，H^+ 上の実軸に垂直な直線 L_0 を軸とし，点 A を通る極限円の作図を考えます．

(i) L_0 に関し A と対称な点 A'を作ります．

(ii)さらに A'を通り L_0 と平行な直線 L_1 を作図し，L_1 に関し A と対称な点 A"を作ります．

(iii) A"を通り L_1 と平行な直線 L_2 を作図し，L_2 に関し A'と対称な点 A'"を作ります．

同様にして対称移動を重ねれば，次々に点を延長できます．



今度は，2 点間の分割を考えます．

(iv)A を通り L_0 と平行な直線 M_0 を引き，L_0 と M_0 の 2 等分線 M_1 を引きます．M_1 に関し A と対称な点 B を作ると B は A と A'の中点です．

(iv) M_0 と M_1 の 2 等分線 M_2 を引きます．M_2 に関し A と対称な点 B'を作ると B'は A と B の中点です．

同様にして，2 点間を 2^n 個に等分できます．

以上の様にして，「点 A を通り適当な直線を軸とする極限円」を作図できます．（詳しくは極限円上の点を，稠密に取ることができます．）この作図では，ロバチェフスキーと違い，平行線角は使っていません．（もちろんロバチェフスキーのやり方でも，三角形の合同を使えば，コンパスと定規で作図できますが，「より作図らしい」のは Bolyai の方だと思います．）

construction of horicircle.ggb